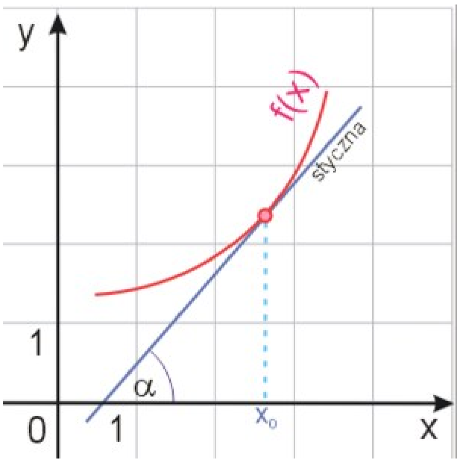
Extrema lokalne funkcji jednej zmiennej

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.



Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta α jaki tworzy styczna do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 z dodatnim kierunkiem osi Ox.

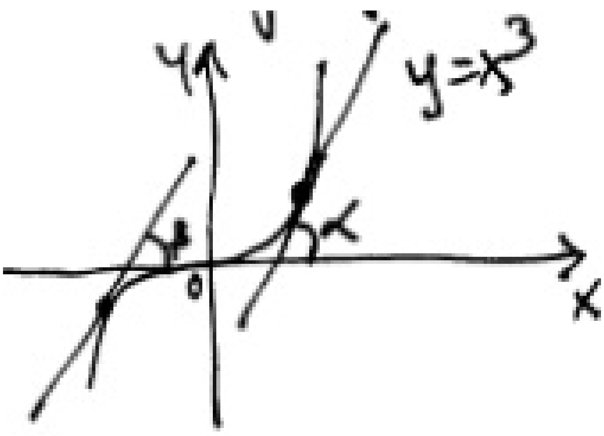
Czyli $f'(x)|_{x_0} = \operatorname{tg} \alpha$

Kąty z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$ są kątami ostrymi. Odpowiada im położenie stycznej na gałęzi wykresu w przedziale narastania wartości funkcji. Kąty z przedziału $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ są kątami rozwartymi. Odpowiada im położenie stycznej na gałęzi wykresu w przedziale malenia funkcji $f(x)$.
Wniosek z powyższych ustaleń jest taki, że tam gdzie pochodna funkcji ma wartość dodatnią tam funkcja rośnie, a tam gdzie pochodna ma wartość ujemną tam funkcja maleje. W przypadku gdy w punkcie x_0 pochodna ma wartość zero funkcja ani nie rośnie ani nie maleje. Styczna do funkcji w takim punkcie jest równoległa do osi Ox (Kąt α ma wartość zero czyli jego tangens też ma wartość zero, zatem pochodna ma wartość zero).

W sytuacji gdy w punkcie x_0 pochodna ma wartość zero mogą wystąpić trzy różne ewentualności.
Jeśli funkcja na lewo od punktu x_0 rośnie (pochodna jest dodatnia) a na prawo maleje (pochodna jest ujemna), to w punkcie x_0 występuje maksimum.

Jeśli na lewo od punktu x_0 funkcja maleje (pochodna jest ujemna) a na prawo rośnie (pochodna jest dodatnia), to w punkcie x_0 występuje minimum.

Jeśli na lewo od punktu x_0 funkcja rośnie (pochodna jest dodatnia) i na prawo też rośnie a w punkcie x_0 pochodna ma wartość zero, to w punkcie x_0 występuje punkt przegięcia.(Patrz rysunek).



Analogiczna sytuacja dla funkcji malejącej po obu stronach punktu x_0 także oznacza, że w punkcie x_0 wystąpi punkt przegięcia o ile $f'(x_0)$ ma wartość zero. Na rysunku punktem x_0 jest punkt 0 na osi Ox.

Twierdzenie 1 (Warunek konieczny istnienia extremum)
Jeżeli funkcja w punkcie x_0 posiada extremum i istnieje pochodna funkcji w tym punkcie, to $f'(x_0) = 0$.

Twierdzenie 2 (Warunek wystarczający (dostateczny) istnienia extremum)
Jeśli istnieją pochodne $f'(x_0)$ i $f''(x_0)$ oraz $f'(x_0) = 0$, to jeśli:
$f''(x_0) > 0$, to w punkcie x_0 występuje minimum,
$f''(x_0) < 0$, to w punkcie x_0 występuje maximum.

Uwaga
$f''(x) = (f'(x))'$

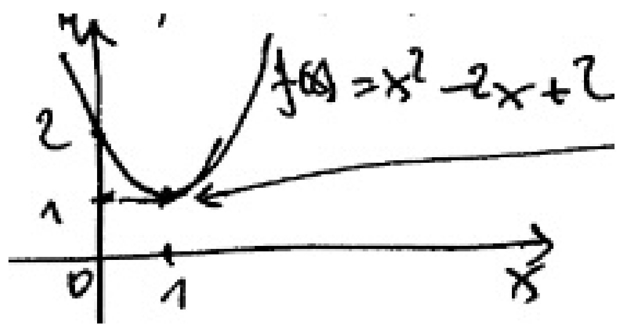
Twierdzenie 3 (Inne sformułowanie warunku dostatecznego). Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i przy przejściu przez punkt x_0 (z lewa na prawo) pochodna $f'(x)$ zmienia znak z "+" na "-", to w punkcie x_0 występuje maximum.
Jeśli przy przejściu przez punkt x_0 pochodna zmienia znak z "-" na "+", to w punkcie x_0 występuje minimum.

Wnioski
a) Jeżeli dla $x \in (a, b)$ funkcja $y = f(x)$ rośnie, to $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$,
b) Jeżeli dla $x \in (a, b)$ funkcja $y = f(x)$ maleje, to $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$.

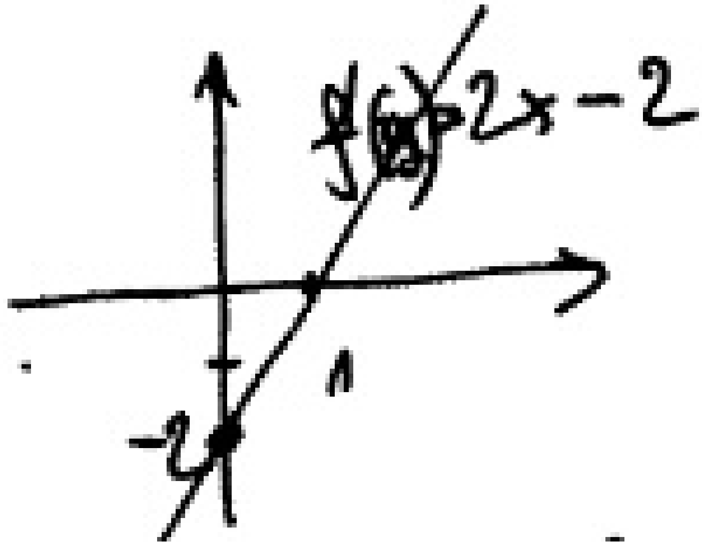
Przykład 1 (Wyznaczanie extremum) Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. Obliczamy pochodną funkcji $f'(x) = 2x - 2$,
2. Rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0$ czyli $2x - 2 = 0$ wyznaczając w ten sposób argumenty x, dla których pochodna ma wartość zero. Odpowiada to położeniu stycznej do wykresu funkcji równolegle do osi Ox. Otrzymujemy $x = 1$.
3. Obliczamy wartość drugiej pochodnej $f''(x)|_{x_0=1}$. $f''(x) = 2 > 0$.

Zatem w punkcie x_0 występuje minimum.

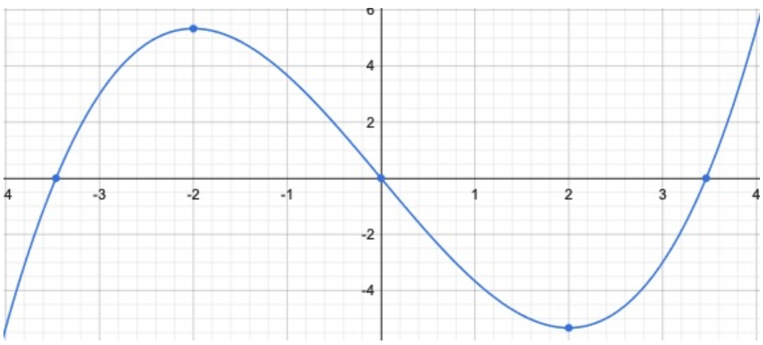


Można też zbadać zmianę znaku pochodnej przy przechodzeniu z lewa na prawo przez punkt $x = 1$



Widać, że pochodna $f'(x)$, której wykresem jest prosta o równaniu $y = 2x-2$ ma wartości ujemne na lewo od punktu $x = 1$ i dodatnie na prawo do tego punktu. Zatem zmienia znak z "-" na "+". Funkcja zatem na lewo od punktu $x = 1$ maleje a na prawo rośnie. Więc w punkcie $x = 1$ realizuje się minimum.

Przykład 2
$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \qquad D = \mathbb{R}$
Obliczamy pochodną: $f'(x) = 3\frac{1}{3}x^2 - 4 = x^2 - 4$.
Rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0$ czyli $x^2 - 4 = 0$. Otrzymujemy $x = -2$ oraz $x = 2$.
Obliczamy drugą pochodną w obu punktach:
$x_1 = -2 \quad f''(x_1) = 2x|_{x_1} = -4 < 0$
$x_2 = 2 \quad f''(x_2) = 2x|_{x_2} = 4 > 0$
Czyli dla x_1 mamy maksimum (bo $f''(x_1) < 0$) a dla x_2 mamy minimum (bo $f''(x) > 0$)

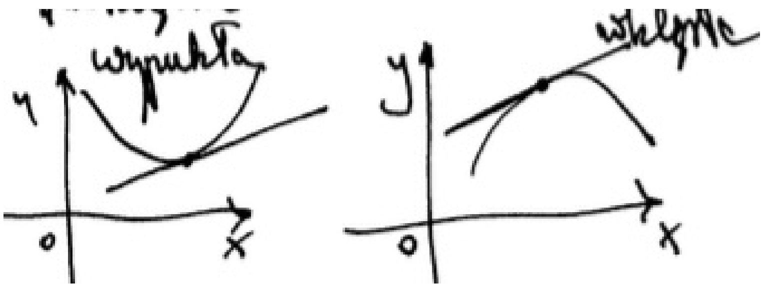


Wypukłość i wklęsłość funkcji

Fakt1
Jeżeli w otoczeniu punktu x_0 druga pochodna funkcji jest nieujemna, to w tym otoczeniu funkcja jest wypukła.
Definicja 1 (Wypukłość funkcji)
Funkcja $f(x)$ jest wypukła w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji leży ponad wykresem stycznej dla każdego punktu $x \in (a, b)$.

Definicja 2 (Wklęsłość funkcji)
Funkcja $f(x)$ jest wklęsła w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji leży poniżej wykresem stycznej dla każdego punktu $x \in (a, b)$.

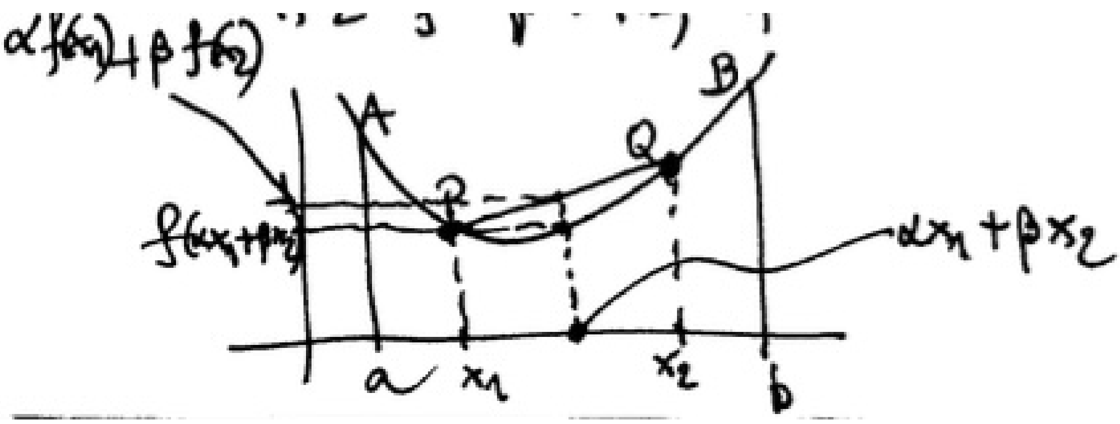
Fakt 2
Jeżeli w otoczeniu punktu x_0 druga pochodna funkcji jest ujemna lub równa zero, to funkcja jest wklęsła.



Definicja 3 (Punkt przegięcia)
Jeżeli z jednej strony punktu x_0 funkcja jest wypukła zaś z drugiej strony wklęsłą, to punkt x_0 nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji.

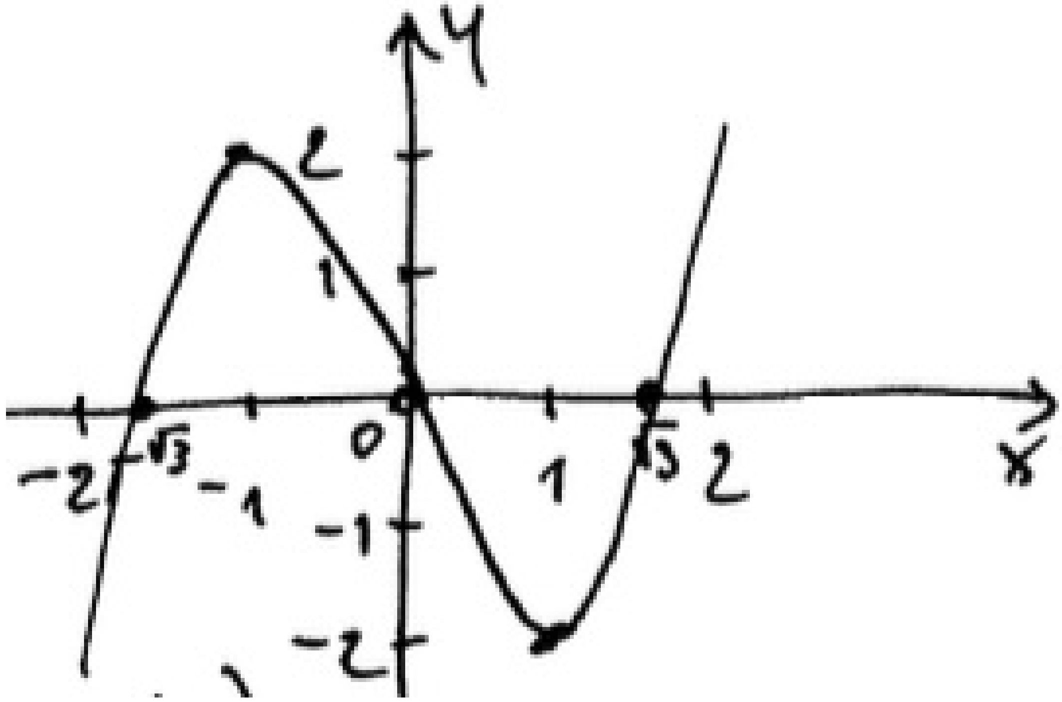
Fakt 3
Funkcja rzeczywista f jest wypukła wtedy i ylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in D_f}\ \bigwedge_{\alpha,\beta\in[0,1],\alpha+\beta=1} f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$$



Przykład 3
Wyznaczyć extrema, punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji $f(x)=x(x^2-3)$.
1. $D=\mathbb{R}$
2. Miejsca zerowe (pierwiastki): $x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$.
3. Pochodna: $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$
4. Miejsca zerowe pochodnej: $x=-1$ oraz $x=1$
5. Druga pochodna: $f''(x)=6x$, stąd $f''(x=-1)=f''(-1)=-6<0$. $f''(x=1)=f''(1)=6>0$. Zatem w $x=-1$ jest maksimum a w $x=1$ jest minimum.
6. Punkt przegięcia: $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x=0$, skąd wynika $x=0$.
7. Przedziały wypukłości i wklęsłości:

a) $f''(x)>0\Leftrightarrow 6x>0$ skąd $x>0$ - tu funkcja jest wypukła (dla $x\in(0,\infty)$).
b) $f''(x)<0\Leftrightarrow 6x<0$ skąd $x<0$ - tu funkcja jest wklęsła (dla $x\in(\infty,0)$).


Y
2
1
0
x
-2
$-\sqrt{3}$
-1
1
$\sqrt{3}$
2
-1
-2